• $z^3 = \overline{a} \iff z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\iff z_k' = r\, e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $k \in \{0,1,2\}$

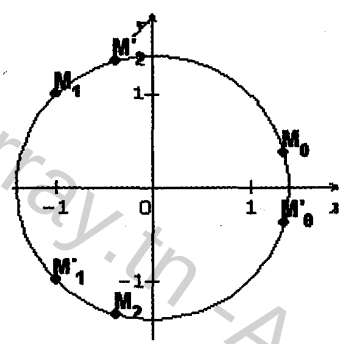
On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie $r = \sqrt{2}$

Donc les racines cubiques de $\overline{a}$ sont :

$z_0' = \overline{z_0} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z_1' = \overline{z_1} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

et $z_2' = \overline{z_2} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

• Construction des points M_0, M_1 ,M_2 ,M_0',M_1' et M_2' affixes des solutions trouvées :



● $P(z) = z^6 - 4z^3 + 8$

a) z_0 solution de (E) $\iff \rho(z_0) = {z_0}^6 - 4{z_0}^3 + 8 = 0$

$\iff \overline{{z_0}^6 - 4{z_0}^3 + 8 = 0} \iff \overline{z_0}^6 - 4\overline{z_0}^3 + 8 = 0$

Donc $\overline{z_0}$ est une solution de (E)

b) Posons $Z = z^3$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 4Z + 8 = 0 \\ Z = z^3 \end{cases}$$

Résolution de : $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \implies \delta = 2i$

D'où $Z' = 2 + 2i$ ou $Z'' = 2 - 2i$

Ce qui donne : $z^3 = 2 + 2i = a$ ou bien $z^3 = 2 - 2i = \overline{a}$

D'après la question 2)

$$S_C = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right\}$$

4) On a :

$(z - z_0).(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0\overline{z_0}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_0)z + |z_0|^2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2$

De même :

$(z - z_1).(z - \overline{z_1}) = z^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1\overline{z_1}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_1)z + |z_1|^2$

$= z^2 + 2z + 2$

$(z - z_2).(z - \overline{z_2}) = z^2 - (z_2 + \overline{z_2})z + z_2\overline{z_2}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_2)z + |z_2|^2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\frac{7\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2$

P(z) =

$(z - z_0).(z - \overline{z_0})\,(z - z_1).(z - \overline{z_1})\,(z - z_2).(z - \overline{z_2})$

$= (z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2)\,(z^2 + 2z + 2)\,(z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2)$

$P(z) = (z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2)\,(z^2 + 2z + 2)\,(z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2)$

Exercice n° 18 $\theta \in [-\pi, \pi[$

(E) : $iz^2 + (2\sin\theta)z - 2i(1 + \cos\theta) = 0$

● a) **rectifier** $\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = -(1 + \cos\theta)^2$

On a $\forall\ \theta \in [-\pi, \pi[$:

$\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = 1 - \cos^2\theta - 2 - 2\cos\theta$

$= -\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1$

$= -(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1)$

$= -(1 + \cos\theta)^2$

b) Résolution de l'équation (E)

$\Delta' = \sin^2\theta - (-2i)i(1 + \cos\theta)$

$= \sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = -(1 + \cos\theta)^2$

$\Rightarrow \quad \delta' = i(1 + \cos\theta)$

D'où $z' = \dfrac{-\sin\theta + i(1+\cos\theta)}{i} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \dfrac{-\sin\theta - i(1+\cos\theta)}{i} = -1 - \cos\theta + i\sin\theta$

● a)

$-\overline{z'} = -\left[\overline{(1+\cos\theta) + i\sin\theta}\right] = -\left[(1+\cos\theta) - i\sin\theta\right]$

$= -(1+\cos\theta) + i\sin\theta = z''$

Par suite aff (M") = - aff (M') : donc M' et M" sont symétrique par rapport à la droite des ordonnées $(O, \vec{v})$

Oarray.tn - Aqra Blech Oarray.tn